***עבודת בית 2: תכנון אלגוריתמים 2021***

**תאריך הגשה:** 22.11.20, 23:59. את העבודה יש להגיש במערכת ההגשה (עדיף מוקלד).

\* מומלץ ביותר ***לא להמתין לרגע האחרון*** להגשת העבודה.

**מתרגלים אחראיים:** שחף פיינדר ועירית שלי

**הוראות כלליות:**

* כל עוד לא נאמר אחרת, כאשר הנכם מתבקשים לתאר אלגוריתם יש לספק את הבאות:

1. תיאור מילולי של האלגוריתם.

2. הוכחת נכונות.

3. ניתוח זמן ריצה

* אלגוריתם עם זמן ריצה אקספוננציאלי לא נחשב יעיל ולכן בדרך כלל לא יתקבל.
* יש לרשום פתרון בדף התשובות הנלווה לעבודה.
* לתשומת לבכם, המקום שהוקצה בדף התשובות הינו פי 1.5 מהמקום המומלץ.

**שאלה 1**

הצעה 1

|  |
| --- |
|  |
| עבור הגרף G, האלגוריתם בחר לחלק את הצמתים לשתי קבוצות . |
| לפי האלגוריתם אנו נחבר בעזרת הצלע המינימאלית את קבוצות הקודקודים. כלומר, הצלע שתיבחר הינה |
| בעלת משקל 1. |
| וקיבלנו כי העץ מורכב מהצלעות ויהיה בעל משקל 4. |
| לעומת זאת אם נוריד את הצלע ונחבר את הצלע נקבל עץ פורש בעל משקל 3. |
| זו סתירה למינימאליות העץ הפורש, ולכן האלגוריתם אינו תקין. |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

הצעה 2

|  |
| --- |
| נוכיח. ננסח שתי טענות ונקרא לאלגוריתם המתואר קרוסקל מקוצר. |
| קיים MST כך שהגרף המוחזר מפרים לאחר איטרציות מוכל בו קרוסקל מקוצר מחזיר MST |
| הערה – קרוסקל מקוצר בוחר מתוך כל הצלעות (C) האפשריות שלא נבחרו בשלב שפרים פעל |
| 1: נראה כי בכל שלב בפרים קיים MST שמכיל את כל בחירות האלגוריתם ולכן בפרט לאחר |
| באינדוקציה על מספר הקשתות שהאלגוריתם בחר (שמוכלות ב-B) |
| בסיס: |B|=0 ולכן קבוצה ריקה מוכלת בכל MST. נניח כי ל- קיים MST T שמכיל את B. |
| צעד: נניח כי קיים עץ שמכיל את 1 𝑖 − הקשתות הראשונות שהאלגוריתם בחר, ותהי . |
| הקשת ה- i שהאלגוריתם בחר. אם אז סיימנו. אחרת ב-T יש מסלול מ-v ל-w ונסמנו |
| יהי j אינדקס כך ש- ו- ונשים לב כי ו- . האלגוריתם בחר בקשת e ולא בקשת |
| ולכן . נתבונן ב- . מטענה שהוכחה בכיתה T’ |
| הוא עץ פורש וגם ולכן T’ הוא עפ"מ המכיל את כנדרש. |
|  |
| 2: נוכיח קודם כי בכל שלב באלגו' קיים MST כך שאוסף הצלעות שנבחרו מוכל בו. נראה באינ' על גודל B. |
| בסיס: B היא בחירת הצלעות של פרים בעל איטרציות ומטענה 1 קיים MST כך ש-B מוכלת בו. |
| הנחה: נניח כי באיטרציה ה-(i-1) קיים MST T כך B מוכלת בו. |
| צעד: תהי הקשת שהתווספה ל-B באיטרציה ה-i. נחלק למקרים אם אז סיימנו. אחרת |
| נתבונן ב-, H מכיל מעגל ו-B לא מכילה מעגל. לכן קיימת קשת e’ במגעל ב-H שלא נמצאת בB. |
| הקשת e’ שייכת ל-T שמכיל את B ולכן B לא מכילה מעגל. האלגורתם בחר קשת על משקל מנמאלי שלא סוגרת מעגל |
| ולכן . נסתכל על מטענה שהוכחנו בכיתה T’ הוא עף פורש. |
| לכן כלומר T’ הוא עפ"מ ומכיל את כל הקשתות ב-B. |
|  |
| נראה כי האלגוריתם קרוסקל מקוצר מחזיר עפ"מ. |
| אם האלגוריתם מסתיים אז הוא מחזר גרף חסר מעגלים שמכיל קשתות. לכן הוא מחזיר עף פורש שלפי טענת |
| העזר מוכל בעפ"מ ולכן מוחזר עפ"מ |
| נראה שהאלגוריתם מסתיים כלומר משלים את הגרף המתקבל מפרים ל- צלעות: |
| נניח כי בשלב מסויים ונראה כי אז . |
| לפי טענת העזר קיים עץ פורש T המכיל את קשתות B. מכיוון שב-T יש , קיימת קשת e המופיעה ב-T |
| אבל לא ב-B. אז ולכן . |
| יהי j אינדקס כך ש- ו- ונשים לב כי ו- . האלגוריתם בחר בקשת e ולא בקשת |
| ולכן . נתבונן ב- . מטענה שהוכחה בכיתה T’ |
| הוא עץ פורש וגם ולכן T’ הוא עפ"מ המכיל את כנדרש. |
|  |
| 2: נוכיח קודם כי בכל שלב באלגו' קיים MST כך שאוסף הצלעות שנבחרו מוכל בו. נראה באינ' על גודל B. |
| בסיס: B היא בחירת הצלעות של פרים בעל איטרציות ומטענה 1 קיים MST כך ש-B מוכלת בו. |
| הנחה: נניח כי באיטרציה ה-(i-1) קיים MST T כך B מוכלת בו. |
| צעד: תהי הקשת שהתווספה ל-B באיטרציה ה-i. נחלק למקרים אם אז סיימנו. אחרת |
| נתבונן ב-, H מכיל מעגל ו-B לא מכילה מעגל. לכן קיימת קשת e’ במגעל ב-H שלא נמצאת בB. |
| הקשת e’ שייכת ל-T שמכיל את B ולכן B לא מכילה מעגל. האלגורתם בחר קשת על משקל מנמאלי שלא סוגרת מעגל |
| ולכן . נסתכל על מטענה שהוכחנו בכיתה T’ הוא עף פורש. |
|  |
|  |
|  |

**שאלה 2**

סעיף א׳

|  |
| --- |
| **תת בעיה:** לכל נגדיר תת בעיה להיות בעיית מציאת המסלול מ ל בעל ההפרש המינימאלי בין הצלעות |
| הצהובות לירוקות. |
| **:** קבוצת כל המסלולים מ ל, כלומר אם: |
| ***:*** *המסלול מ ל בעל ההפרש המינימאלי, כלומר:* |
| **כאשר הפונקציה מוגדרת:** |
|  |
|  |

סעיף ב׳

|  |
| --- |
| עבור קבוצת השכנים עם קשתות נכנסות של קודקוד (כלומר, ) נחלק את |
| באופן הבא ל תתי קבוצות: נוכיח כי הקבוצות שקולות: |
| : יהי מסלול , לכן . נסמן: |
| *לכן, ,* לכן: . |
| *:* יהי מסלול , לכן , |
| ומכיוון ש אז: ולכן |

סעיף ג׳

|  |
| --- |
| נוסחת המבנה: |
| עבור קבוצת השכנים : |
|  |
|  |
|  |

סעיף ד׳

|  |
| --- |
| הוכחת נכונות נוסחת המבנה: |
| נראה כי בשני המקרים של נוסחאות המבנה, שווה לאגף ימין של הנוסחה. |
| מקרה א': : במקרה זה ולכן הפתרון הוא יחיד, ומשקל ההפרש שלו הוא 0. |
| מקרה ב': : |
| **אבחנה 1**: |
| ***טענת עזר****: אם עבור מתקיים אזי לכל מתקיים:* |
|  |
| הוכחת טענת עזר: |
| נניח בשלילה כי לא המינימאלי, לכן קיים מסלול מ ל עבורו מתקיים: |
| *, אך כעת נקבל מאבחנה 1 כי:* |
| *וזו סתירה למינימליות .* |
| ***טענה****:* |
|  |
| הוכחת הטענה: |
| עבור מסלול כך ש . |
| מטענת העזר, עבור מסלול נקבל כי |
| מאבחנה 1 נקבל כי |
| ולכן, מסעיף ב' וממינימאליות מסלול , נקבל כי |
|  |
| כעת מציאת השיוויון: עבור קבוצת השכנים : |
|  |
|  |
|  |

סעיף ה׳

|  |
| --- |
| אלגוריתם: |
| נגדיר מערך ומערך , כל אחד כגודל מספר הקודקודים . |
| אתחול: |
| נקבע אינדקס |
| נבצע מעבר על הגרף, כאשר ברגע סיום עבודה על קודקוד ( כלומר סיום מעבר על כל קבוצת שכינו) בצע: |
|  |
|  |
| נקבע |
| עבור עד בצע: |
|  |
| צעד: |
| עבור עד בצע: |
| עבור כל כך ש: בצע: |
| אם |
| קבע |
| החזר: מערך . |

סעיף ו׳

|  |
| --- |
| *נכונות האלגוריתם:* |
| *נשים לב, כי מאופן ביצוע DFS, נסיים לעבוד עבור כל קודקוד בגרף בזמן שונה, ולכן, כל ייצג קודקוד שונה ב .* |
| *בנוסף, נשים לב כי מכיוון שאנו מתחילים את המעבר על הקודקודים מקודקוד , יובטח כי .* |
| *באיטרציה ה, אנו בודקים עבור הקודקוד כי עבור כל אחד משכניו עם קשת נכנסת האם המסלול מ העובר בשכן זה* |
| *ומסתיים ב הינו המינימאלי. בהסתמך על נוסחת המבנה שהוכחנו קודם.* |
| *מאופן ביצוע DFS אנו יודעים כי עבור כל שכן שכזה, כבר מובטח שמשקל המסלול המינימאלי אילו נקבע והוא* |
| *לא ישתנה גם בהמשך (זאת מכיוון שאין מעגלים בגרף).* |
| *בנוסף, מכיוון שנתון כי קיים מסלול מ אל כל קודקוד בגרף, לאחר סיום מעבר ה בהכרח עבור כל קודקוד נקבל כי* |
|  |
|  |
| *זמן ריצה:* |
| *DFS: חסום על ידי* |
| *אתחול המערך לערכי אינסוף: חסום על ידי* |
| *צעד: חסום על ידי* |
| *לכן, האלגוריתם חסום על ידי* ***.*** |
|  |

**שאלה 3**

סעיף א׳

|  |
| --- |
| **תת בעיה:** לכל ולכל נגדיר את תת הבעיה ה להיות זהה לבעיה המקורית פרט |
| לכך שנקודת ההתחלה של השליח היא בנקודה כאשר הוא הגיע מכיוון . |
| **:** קבוצת כל המסלולים המתחילים בכיוון מנקודה ומסתיימים בנקודה . |
| כלומר אם"ם |
| **:** העלות המינימאלית מבין המסלולים שב . כלומר: |
|  |

סעיף ב׳

|  |
| --- |
| נתבונן ב, נחלק אותו לשתי קבוצות, הראשונה מכילה את כל המסלולים שכיוון תנועתם בצומת הראשון |
| אינו משתנה. השנייה מוגדרת כך שכיוון המסלול משתנה בצומת הראשון. |
| אבחנה: כל מסלול, בכל שלב קיימת שתי אפשרויות שינוי כיוון ושמירה על הכיוון לכן קבוצות אלה זרות ואיחודן הוא |
|  |
|  |
|  |

סעיף ג׳

|  |
| --- |
| נוסחת המבנה: |
| נגדיר המחזירה את ערך המעבר בצומת בהתאם להאם התבצעה פניה או לא |
|  |
| מסמן כיון כניסה אנכי, ו- כיוון כניסה אופקי |
|  |
|  |

סעיף ד׳

|  |
| --- |
| הוכחת נכונות נוסחת המבנה: |
| ישנם 3 מקרי בסיס: |
| 1. מציאת עלות מסלול מהנקודה הנוכחת לנקודה הנוכחית – עלות 0 |
| 2. אם הגענו לעמודה הימנית ביותר של המטריצה אין אפשרות למסלול אחר פרט לתנועה אנכית ולכן נסכום את |
| עלות המעבר בצומת הנוכחי (בתלות אם בצענו פניה) ואת עלות המעבר בכל שאר הצמתים במסלול פרט לאחרון |
| 3. אם הגענו לשורה התחתונה של המטריצה אין אפשרות למסלול אחר פרט לתנועה אופקית ולכן נסכום את |
| עלות המעבר בצומת הנוכחי (בתלות אם בצענו פניה) ואת עלות המעבר בכל שאר הצמתים במסלול פרט לאחרון |
|  |
| פרט למקרי הבסיס, בכל שלב בו נרצה להקטין את גודל הבעיה נבחין בין שני מקרים: שינוי כיוון ואי שינוי כיוון. |
| נחפש את המינימום מבין הפתרונות האופטימלי על תזוזה ימינה ותזוזה מטה (שמייצגות שינוי או אי-שינוי כיוון) ולכן |
| מהם נוסיף את עלות המעבר בצומת הנוכחי. |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

סעיף ה׳

|  |
| --- |
| אלגוריתם לחישוב ערכי : |
| נגדיר מערך דו-ממדי בגודל זהה למטריצה. בכל תא במערך זה ישמרו שני ערכים כך ש- ייצג את עלות |
| המסלול האופטימלי של מעבר בנקודה כך שכיון ההגעה הוא אנכי. באופן דומה לאופקי. |
| צעד: עבור מ- עד בצע: |
| עבור מ- עד בצע: |
| אם וגם : |
| אחרת אם : |
|  |
| אחרת אם : |
|  |
| אחרת: |
|  |
| החזר את M[i][j].y |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

סעיף ו׳

|  |
| --- |
| *הסבר נכונות האלגוריתם:* |
| *לכל תא במטריצה באלגוריתם האיטרטיבי נשמרים שני ערכים x שמציין את עלות המסלול המינימלי מהנקודה ללקוח בהגעה* |
| *מכיוון אנכי ובאופן דומה לערך y בהגעה מכיוון אופקי.* |
| *חישוב תאי המטריצה מבוצע בסדר כזה שבכל חישוב עלות תא (פרט למקרי הבסיס) התאים הסמוכים (מימין ומלמטה לתא) כבר* |
| *מחזיקים את ערך המסלולים האופטימליים כך שניתן לחשב את המסלול האופטימלי בתלות שינוי הכיוון בצומת.* |
| *מקרי הבסיס דואגים לבחור את הכיוון האפשרי היחיד במידה ואין בחירה. (כך שכל המסלולים יסתיימו בנקודה הנדרשת).* |
| *4 שומר את הערכים להגעה אנכית ואופקית מפני שבניית המסלול מהסוף לא יודע מאיזה כיוון הגענו בפתרון האופטימלי המחושב.* |
| *זמן ריצה:* |
| *האלגוריתם עובר בכל תא של המטרציה הדו-ממדית פעם אחד בלבד ומבצע כל לתא מספר קבוע של פעולות. לכן זמן הריצה של* |
| *האלגוריתם האיטרטיבי הוא* ***.*** |
|  |
|  |

**שאלה 4**

סעיף א׳

|  |
| --- |
| **תת בעיה:** לכל ולכל נגדיר תת בעיה להיות בעיה של מציאת מספר פעולות |
| הזזת קופסאות מינימאלי מקומה ומטה, כך שנותרו קומות אפסון לבחור. ועם קבוצת הקומות שלא מאופסנות עדיין |
| **:** היא קבוצת כל הפתרונות החוקיים עבור תת הבעיה ה, כלומר |
| אם"ם: |
| ***:*** *הוא עלות העבודה המינימאלית של פתרון חוקי עבור תת הבעיה , כלומר:* |
| כאשר: |
|  |

סעיף ב׳

|  |
| --- |
| נחלק את הקבוצה ל2 תתי קבוצות: |
| 1. כל הפתרונות בהן , כלומר: הקומה (הגבוהה ביותר בתת-בעיה) היא קומת אפסון. |
| 1. כל הפתרונות בהן , כלומר: הקומה היא איננה קומת אפסון. |
| נשים לב כי הקבוצות זרות ואיחודן מהווה את כל קבוצת הפתרונות . |
| כלומר, נקבל: |
|  |
|  |

סעיף ג׳

|  |
| --- |
| נוסחת המבנה: |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

סעיף ד׳

|  |
| --- |
| הוכחת נכונות נוסחת המבנה: |
| לכל אחד משלושת המקרים בנוסחאות המבנה ננתח את ונראה שהוא שווה לאגף ימין של הנוסחה: |
| אבחנה: לא ייתכן כי מכיוון שלא יהיו יותר קומות אפסון מאשר מספר הקומות עצמן. |
| מקרה א': |
| במקרה זה נקבע כי כל קומה היא קומת אפסון, לכן יידרשו 0 העברות ארגזים, וזהו יהיה הפתרון האופטימלי. |
| מקרה ב': |
| **אבחנה 1:** קבוצת הפתרונות ב בהן אינה חלק מהפתרון היא בדיוק : |
| , מכיוון שהקומה ה אינה קומת אפסון, נשלם על הורדת הארגזים מקומות |
| קומה אחת נוספת לקומה ונשאר עדיין עם קומות אפסון לחלק. |
| המשך מקרה ב': מכיוון ש אז יש מחסן יחיד. ומכיוון שאי אפשר להעלות ארגזים לקומות אפסון מקומות נמוכות |
| יותר, ומכיוון ש , (כלומר ישנן קומות נמוכות יותר מ), לא נוכל לבחור בקומה זו כקומת אפסון, ונחייב |
| להוריד את ארגזי קומה , צעד זה יעלה להוריד כל אחד מקבוצות הארגזים קומה נוספת. כלומר: . |
| ולכן, נקבל מסעיף ב', הפתרון זהה לפתרון . ולכן: |
|  |
|  |
| מקרה ג': |
| **אבחנה 2:** קבוצת הפתרונות ב בהן חלק מהפתרון, היא בדיוק: , |
| מכיוון שהקומה ה קומת אפסון, לא נעביר אף ארגז מטה, וכעת נעבוד על קבוצת הקומות של המחסן הבא: . |
| המשך מקרה ג': |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

סעיף ה׳

|  |
| --- |
| אלגוריתם לחישוב ערך : |
| נקבל מערך עם משקלי קומות ומספר של קומות אפסון, ונגדיר מטריצה |
| כאשר מסמן את הקומה, מסמן את מס המחסנים, ו מסמן את מספר החדרים ב. נשים לב |
| **אתחול:** |
| עבור עד בצע: //מקרה בסיס א' |
| עבור עד בצע: |
| עבור עד בצע: |
|  |
| **צעד:** |
| עבור עד בצע: //מקרה ב' |
| עבור עד בצע: |
|  |
| עבור עד בצע: //מקרה ג' |
| עבור עד בצע: |
| עבור עד בצע: |
| נקבע |
| אם |
| אז |
| **החזר:** |
|  |
|  |

סעיף ו׳

|  |
| --- |
| אלגוריתם לשחזור פתרון אופטימאלי: |
| נקבל מטריצה ונגדיר מערך בגודל . |
| נאתחל עבור כל עד : |
| *נקבע* |
| *עבור עד 1* |
| *נקבע* |
| *כל עוד בצע:* |
|  |
| *נקבע L[j]* |
| *נקבע* |
|  |
| *זמן ריצה:* |
| אנו מבצעים איטרציה עם אינדקס מ עד 1, כאשר האינדקס מציין את הקומה אשר לה אנו משווים את הפתרון |
| האופטימלי עם הקומה האחרונה הידועה שהיא קומת אפסון. |
| אנו נעבור איטרציה מ ל רק כאשר הקומה היא קומת אפסון. וכל עוד היא לא, בכל צעד יורד, |
| קומה. אם נקבל כי כל קומה היא מחסן ונתקדם באיטרציה על אינדקס עד שנגיע לקומה הראשונה ונעצור. |
| כלומר זמן הריצה הוא כמספר הקומות. ולכן: זמן הריצה הוא: |

**בהצלחה!**